

Introducción al Grupo de Renormalización

Rodolfo Cuerno

Departamento de Matemáticas y GISC

Universidad Carlos III de Madrid

`cuerno@math.uc3m.es`

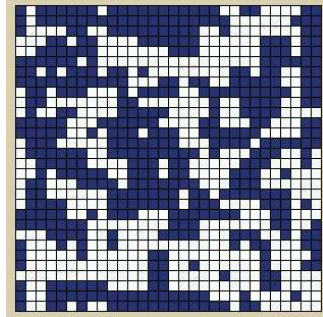
`http://gisc.uc3m.es/~cuerno`

Plan de la charla

- *¿Cuál es el problema?*
Invariancia de escala; universalidad
- *¿Por qué nos importa?*
Fenómeno ubicuo en Física y Matemáticas
- *¿Qué es lo que hacemos?*
Grupo de Renormalización
 - Ejemplos
 - Estructura general
- Algunas conclusiones

¿Cuál es el problema?

Ejemplo canónico: *Modelo de Ising* (~ 1925)



$$s_i = \pm 1$$

Hamiltoniano (energía)

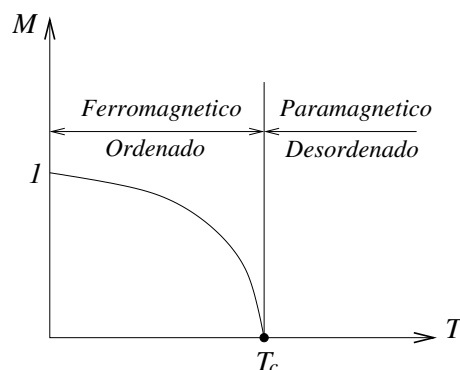
$$\mathcal{H}_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

Función de partición

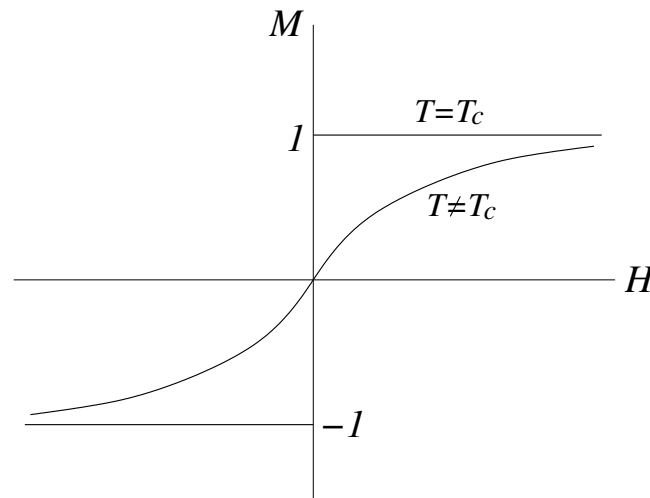
$$\mathcal{Z}_{\text{Ising}} = \sum_{\{s_j\}} e^{-\frac{1}{k_B T} \mathcal{H}_{\text{Ising}}}$$

Imanación

$$M = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j$$



Susceptibilidad y correlaciones



Susceptibilidad isoterma

$$\chi_T = \frac{\partial M}{\partial H}$$

Función de correlación

$$G_{ij} = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \quad \sim \quad \text{probabilidad } s_i = s_j$$

$$\left[\underbrace{S(0)}_{\text{líquidos}} \right] \quad \chi_T = \int dr G(r)$$

(Fluctuación-disipación)

$$T = T_c \Rightarrow \chi_T = \infty$$

Sistema CRÍTICO: sensibilidad a perturbaciones
Opalescencia crítica

Susceptibilidad y correlaciones (2)

$T > T_c$: Sistema *desordenado*

$$G(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{\text{const.}}}$$

$\xi \equiv$ longitud de correlacion

$T < T_c$: Sistema *ordenado*

$$G(r) \sim \text{const.}$$

$T = T_c$: Sistema *crítico*

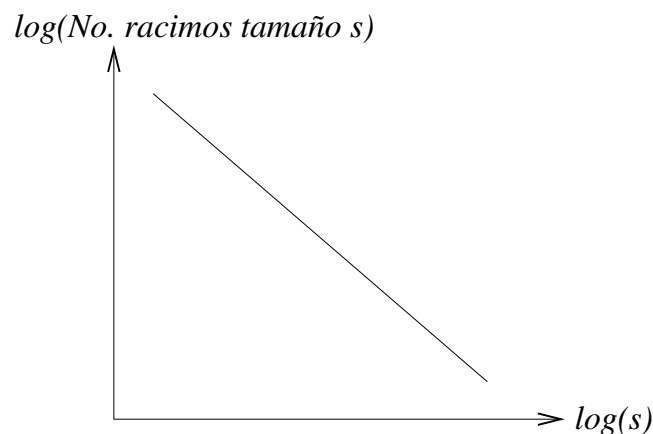
$$\chi_T = \int dr G(r) = \infty \iff \boxed{\xi = \infty}$$

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{2-d+\eta}} \longrightarrow \text{ley de potencias}$$

En general $\xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$ $\nu, \eta \equiv$ exponentes críticos

Problemas

- Divergencias en el punto crítico $\chi_T = \infty, \xi = \infty, \dots$
- Valores no racionales para los exponentes
 $\nu_{\text{Ising}(d=2)} = 0.630 \dots \Rightarrow$ Análisis Dimensional falla
- Número grande partículas
- Fuertes correlaciones (fenómeno crítico)
- Muchas (todas) escalas presentes



- Aproximaciones en torno a una escala característica fallan
- Teoría de campo medio (*por ej.* Weiss) falla:

$$\xi \sim (T - T_c)^{-\nu} \begin{cases} \text{campo medio} & \nu = 1/2 \quad \forall d \\ \nu_{\text{Ising}(d=2)} \neq \nu_{\text{Ising}(d=3)} \end{cases}$$

¿Por qué nos importa?

La invariancia de escala es frecuente en la Naturaleza

$\hbar \neq 0 \rightsquigarrow$ J. RODRÍGUEZ LAGUNA

$\hbar = 0$:

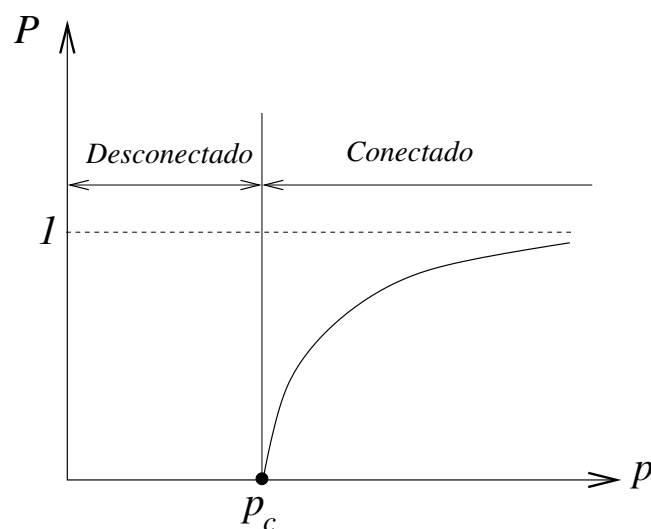
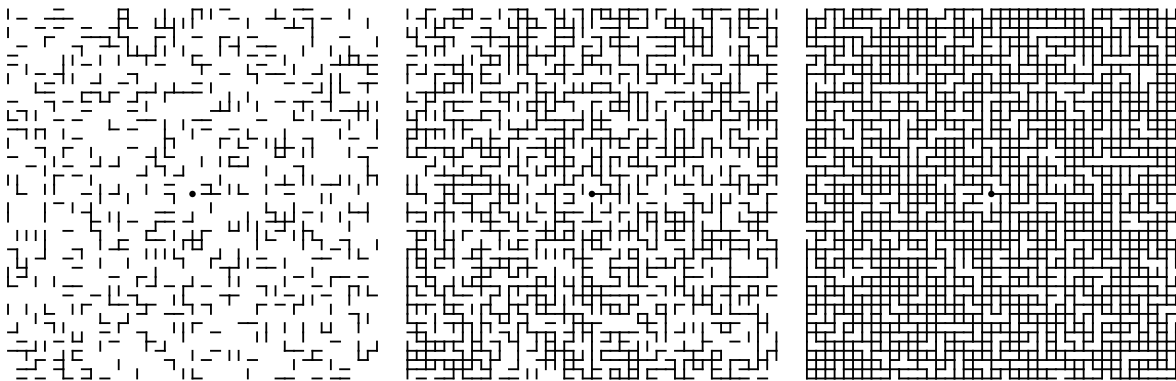
- Sistemas en equilibrio
 - “puros”: Ising, líquidos
 - con impurezas o desorden: percolación
- Sistemas con dinámica
 - Cerca del equilibrio: movimiento browniano, difusión
 - Lejos del equilibrio:
 - * SOC \rightsquigarrow R. SÁNCHEZ, B. VAN MILLIGEN
 - * *Generic scale invariance*
 - * Modelos de crecimiento
 - * Turbulencia
- Matemática Aplicada
 - Sistemas dinámicos
 - * $d = 0$ ecuaciones diferenciales ordinarias:
Caos determinista
 - * $d > 0$ EDP's: Asintótica intermedia 2a. especie
 - Fractales

Sistemas con impurezas: Percolación

BROADBENT & HAMMERSLEY \sim 1950

Retículo en d dimensiones (cuadrado, hexagonal, ...)

- *Vértices o nodos* ocupados al azar con probabilidad p
 \rightsquigarrow percolación de *sitios*
- *Enlaces* ocupados al azar con probabilidad p
 \rightsquigarrow percolación de *enlaces*



P = probabilidad estar en racimo infinito

¿Qué es lo que hacemos?

Grupo de Renormalización

(K. WILSON, L. KADANOFF, M.A. FISHER, ...)

- Origen en el estudio de sistemas en los que las *fluctuaciones* son importantes
 - QFT
 - Transiciones continuas (sistemas críticos)
- ¡No es un *grupo*!
- *Idea*: reducir el estudio de un sistema con muchas partes en interacción al de otro equivalente con menos integrantes
- *Objetivo*: estudiar comportamiento *hidrodinámico* del sistema (grandes distancias y/o tiempos)
- Técnica de *análisis asintótico* de validez general
~ refinamiento Análisis Dimensional

(N. GOLDENFELD, G.I. BARENBLATT)

Estrategia

1. Usando invariancia de escala, definir sistema equivalente con menos elementos

COARSE-GRAINING

2. Reescalar para recuperar tamaño original y comparar

REESCALADO

Invariancia escala \Rightarrow Sist. “nuevo” misma *forma*

3. Vuelta a 1.

ITERACIÓN ¿Puntos fijos?

Distinguir

- *Estrategia*: idea NO perturbativa
- *Implementación*: suele requerir *aproximaciones*
 - Controladas: desarrollo ϵ , desarrollo $1/N$, ...
 - No controladas: decimación, GR espacio real, ...

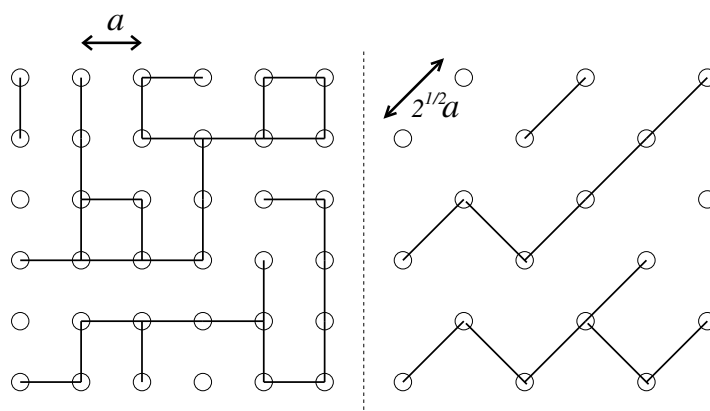
¿Calidad resultados? ¡Depende!

Ejemplo 1: percolación de enlaces

En red cuadrada, eliminamos un nodo de cada dos

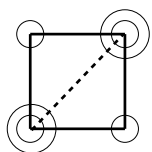
$$a \mapsto b a \quad \text{con} \quad b = \sqrt{2}$$

Red nueva: unimos 2 nodos si en la original los unían al menos 2 enlaces

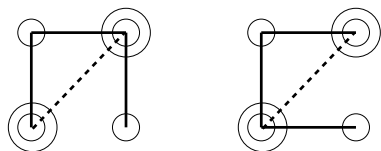


Probabilidad ocupación $p \rightsquigarrow p'$

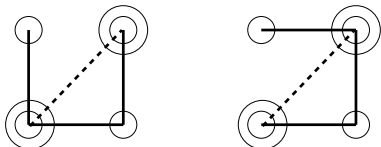
p' = probabilidad 2 sitios unidos por un enlace



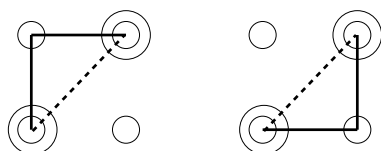
$$p^4$$



$$p^3(1-p)$$



$$p^2(1-p)^2$$



$$p' = p^4 + 4p^3(1 - p) + 2p^2(1 - p)^2 = 2p^2 - p^4$$

En general

$$p' \equiv R_b(p) \quad b = \sqrt{2}$$

Bajo la iteración

$$R_{b_1} R_{b_2} = R_{b_1 b_2} \rightsquigarrow \text{“grupo”}$$

Sin embargo, NO es grupo transformaciones: $\nexists R_b^{-1}$

¡Se pierde información!

Puntos fijos (PF): (\sim invariancia de escala)

$$p^* = 2(p^*)^2 - (p^*)^4 \Rightarrow \begin{cases} p^* = 0 & \text{red desconexa} \\ p^* = 1 & \text{red llena} \\ p^* = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & \text{PF no trivial} \\ & \simeq 0.62 \end{cases}$$

Comparar con $p_c^{\text{exacto}} = 0.5$

Reescalado y exponentes críticos

$$\xi(p) \sim (p - p_c)^{-\nu}$$

En las nuevas unidades, la long. correlación es *menor*

$$\xi'(p') = \frac{\xi(p)}{b} \sim (p' - p_c)^{-\nu}$$

Despejando

$$p' - p_c \sim \frac{b^{1/\nu}}{\xi^{1/\nu}(p)} \sim b^{1/\nu} (p - p_c)$$

por comparar con

$$p' = R_b(p) \underset{\text{des. Taylor}}{\simeq} p_c + \left[\frac{dR_b}{dp} \right]_{p=p_c} (p - p_c) + \dots$$

$$\implies p' - p_c \simeq \left[\frac{dR_b}{dp} \right]_{p=p_c} (p - p_c)$$

$$\implies \boxed{b^{1/\nu} = \left[\frac{dR_b}{dp} \right]_{p=p_c}}$$

Usando

$$\left. \begin{array}{l} R_b(x) = 2x^2 - x^4 \\ b = \sqrt{2} \\ p_c \simeq 0.62 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \nu \simeq 0.818 \\ \text{comparar con} \\ \nu_{\text{exacto}} = 4/3 \end{array} \right.$$

Observaciones

- Resultado para ν *no* muy bueno
 \rightsquigarrow mejorar definición de R_b
- Iteración supone pensar en espacio de parámetros
- Se dice que los parámetros (p, J, H, \dots)
“renormalizan” bajo la iteración
- *Coarse-graining* supone *alejarnos* del punto crítico.
 ξ disminuye, a no ser que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi = \infty & \text{punto crítico} \\ \xi = 0 & \text{sistema compl. desacoplado} \end{array} \right.$$

- Hay puntos fijos

$$\text{– triviales } \left\{ \begin{array}{ll} p = 0 & \sim T_{\text{Ising}} = \infty \\ p = 1 & \sim T_{\text{Ising}} = 0 \end{array} \right.$$

- no triviales

Ejemplo 2: Ising $d = 1$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{k_B T} \mathcal{H}_{\text{Ising}} = \mathcal{K} \sum_{j=1}^N s_j s_{j+1} + h \sum_{j=1}^N s_j + \text{const.}$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{s_i\}} e^{\mathcal{H}} = \sum_{\{s_i\}} \prod_{j \text{ par}} e^{\mathcal{K} s_j (s_{j-1} + s_{j+1}) + h s_j + \frac{h}{2} (s_{j-1} + s_{j+1})}$$

$$= \sum_{s_1, s_3, \dots} \prod_{j \text{ par}} \left\{ e^{\mathcal{K}(s_{j-1} + s_{j+1}) + h + \frac{h}{2}(s_{j-1} + s_{j+1})} + e^{-\mathcal{K}(s_{j-1} + s_{j+1}) - h + \frac{h}{2}(s_{j-1} + s_{j+1})} \right\}$$

(re Etiquetamos)

$$= \sum_{\{s_i\}} \prod_j \left\{ e^{(\mathcal{K} + \frac{h}{2})(s_j + s_{j+1}) + h} + e^{-(\mathcal{K} - \frac{h}{2})(s_j + s_{j+1}) - h} \right\}$$

Análisis flujo

- Para $h = 0$ es $\mathcal{K}' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2\mathcal{K}) \leq \mathcal{K}$
 \Rightarrow la iteración lleva a un sistema
más *débilmente acoplado* \sim más fácil de resolver

- Para $h = 0$ es $\mathcal{K}^* = \begin{cases} 0 & \Rightarrow T \rightarrow \infty \\ \infty & \Rightarrow T \rightarrow 0 \end{cases}$

- El punto fijo

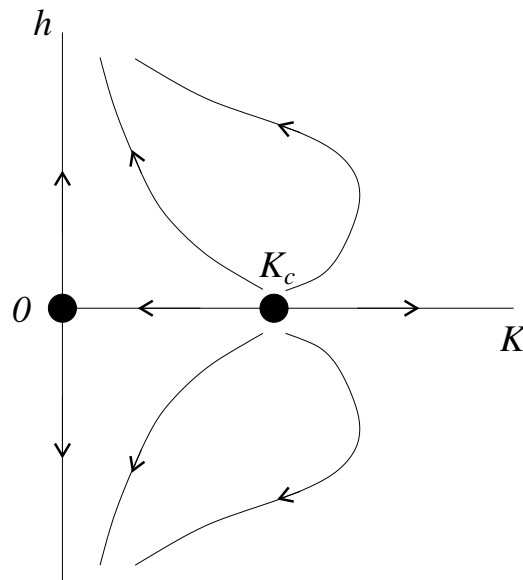
$$(e^{-2\mathcal{K}^*} = 0, e^{-2h^*} = 1) \equiv (h^* = 0, T = 0)$$

es *inestable*: la iteración “aleja” de él al sistema si éste no está justo en él

- Inic. $(h = 0, T \neq 0) \rightsquigarrow$ a escalas grandes,
comportamiento de $T = \infty \sim$ sistema *desordenado*
- Inic. $(h = 0, T = 0) \rightsquigarrow$ a escalas grandes,
comportamiento de espines completamente alineados
- Caso un poco especial: modelo de Ising $d = 1$ tiene
transición de fase justamente para $T = 0$
(comparar SOC)

Modelo de Ising $d = 2$

El flujo es, aproximadamente



Puntos fijos:

- $\mathcal{K}^* = 0, h^* = 0 \rightsquigarrow T = \infty$: sistema *desordenado*
La dirección del campo magnético es *relevante*:
aleja del punto fijo
- $\mathcal{K}^* = \infty, h^* = 0 \rightsquigarrow T = 0$: sistema *ordenado*
- $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_c, h^* = 0 \rightsquigarrow T = T_c$: punto crítico
todas las direcciones son *relevantes*

Características generales

Sistema descrito por hamiltoniano (*equilibrio*)

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{k_B T} \tilde{\mathcal{H}} = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{K}_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\{s_i\})$$

Por ej.

$$\Psi_1 = \sum_{j=1}^N s_j \quad \mathcal{K}_1 = h$$

$$\Psi_2 = \sum_{\langle i,j \rangle} s_j s_{j+1} \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$$

$$\Psi_3 = \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} s_j s_{j+1}$$

...

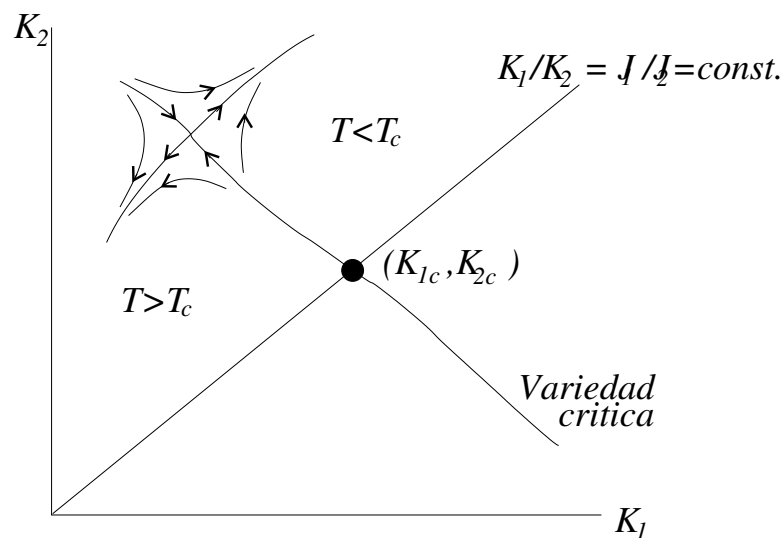
Iteración: *Coarse-graining* + reescalado:

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}' = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{K}'_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\{s_I\})$$

Misma forma \equiv ¡mismos Ψ_{α} !

$$\xi' = \frac{\xi}{b} \Rightarrow \text{ptos. fijos tienen} \begin{cases} \xi = \infty & \text{pto. crítico} \\ \xi = 0 & \text{no corr.} \end{cases}$$

Sea $n = 2$ y pto. crítico en $(\mathcal{K}_{1c}, \mathcal{K}_{2c}) = \left(\frac{J_1}{k_B T_c}, \frac{J_2}{k_B T_c} \right)$



- El flujo *no cruza* la variedad crítica:

$$\xi = \infty \text{ sobre ella}$$

$\xi < \infty$ fuera, y ξ *disminuye* con la iteración

- Puntos fijos

$$\mathcal{K}_j^* = R_j(\{\mathcal{K}_j^*\}) \quad j = 1, 2$$

Linealizando en torno a ellos

$$\delta\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}' - \mathcal{K}^* = M \begin{bmatrix} \delta\mathcal{K}_1 \\ \delta\mathcal{K}_2 \end{bmatrix}$$

$$M_{ij} = \left[\frac{\partial R_i}{\partial \mathcal{K}_j} \right]_{\text{PF}}$$

Sea $M^{(b)}v = \lambda^{(b)} v$

- Propiedad de “grupo”

$$M^{(b_1)} M^{(b_2)} = M^{(b_1 b_2)} \Rightarrow \lambda^{(b_1)} \lambda^{(b_2)} = \lambda^{(b_1 b_2)}$$

$$\iff \lambda = b^y \quad y \text{ exponente crítico } \sim \nu$$

$y > 0 \Rightarrow \lambda > 1$ dirección *relevante*

$y < 0 \Rightarrow \lambda < 1$ dirección *irrelevante*

$y = 0$ dirección *marginal*

- Idea general:

- Considerar conjunto completo términos interacción $\Psi_\alpha(\{s_j\})$. Aproximaciones
- Bajo iteración, cerca punto fijo unos relevantes, otros irrelevantes
- *Universalidad*: propiedades críticas determinadas por autovalores > 1 cerca punto fijo: sólo importan términos *relevantes* de simetría pertinente para la d dada

Algunas conclusiones

- En *equilibrio*, puntos fijos son *estables*
~> *ajuste fino parámetros*
- Fuera del equilibrio, más posibilidades:
 - *Generic scale invariance*: puntos fijos *estables*
 - SOC: ¿?
- Implementaciones GR:
 - GR espacio real
 - GR espacio momentos
 - DMRG
 - GR funcional
 - GR de MC
 - GR fenomenológico
 - Decimación
 - GR cumulantes
 - GR à la Migdal-Kadanoff
 - ⋮
 - ad nauseam*